2026

CANPOINT

CANPOINT®

全品

高考复习方案

主编：肖德好

数学 听课手册

基础版

沈阳出版发行集团
沈阳出版社

全品高考复习方案 数学 基础版

《中国高考评价体系》

指导

2026版《全品高考复习方案》

依据 《普通高中数学课程标准》

细研 高考命题特点及趋势

特点

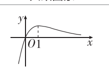
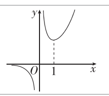
1. 关注新教材，细讲精练，密切贴合新教材。
2. 渗透数学学科核心素养：数学抽象、逻辑推理、数学建模、数学运算、直观想象、数据分析。
3. 体现高考命题趋势，精选模拟试题。
4. 结合教学一线一轮复习实际，合理设置讲练内容。

▼ 图书结构与特点

听课手册

必备知识梳理 —— 教材链接 归纳总结

4. 几个常见函数

解析式	大致图象	单调区间	极值点
$y=\frac{x}{e^x}$		单调递增区间为$(-\infty,1)$；单调递减区间为$(1,+\infty)$	$x=1$
$y=\frac{e^x}{x}$		单调递增区间为$(1,+\infty)$；单调递减区间为$(-\infty,0)$，$(0,1)$	$x=1$

夯基础

要点全面覆盖 —— 高考考点 精讲精析

第1课时　椭圆的定义及性质

课堂考点探究

探究点一　椭圆的定义及其应用

例1 (1)已知点M在椭圆$C:x^2+\frac{y^2}{9}=1$上，F_1，F_2是该椭圆的两个焦点，则$|MF_1|^2+|MF_2|^2$的最小值为（　）

A. 9　B. 12　C. 16　D. 18

◆◆ 总结反思

椭圆定义的应用主要有两个方面：一是明确平面内与两定点有关的轨迹是否为椭圆；二是当P在椭圆(两个焦点为F_1，F_2)上时，利用定义可求焦点三角形的周长，利用定义和余弦定理可求$|PF_1|\cdot|PF_2|$(或$\angle F_1PF_2$)，通过整体代入可求焦点三角形的面积等。

【对点演练1】(1)[2025·安徽芜湖期末] 已知

重难考点 分专题讲解

微专题4　三角函数中与ω范围有关的问题

微专题7　由数列的递推关系求通项公式a_n

破重点

经典真题·明考向 —— 真题剖析 规范答题

素养导向

解题指引——三角函数与解三角形

例 [2024·新课标Ⅰ卷] 记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sin C=\sqrt{2}\cos B$，$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$.

(1)求B；[切入点：利用余弦定理对$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$整理变形]

(2)若$\triangle ABC$的面积为$3+\sqrt{3}$，求c.[关键点：利用c表示出面积]

[思路分析](1)由余弦定理求出$\cos C$，进而求出C，最后结合$\sin C=\sqrt{2}\cos B$得到$\cos B$的值即可求得B；

(2)首先求出A，然后由正弦定理可将a，b均用含有c的式子表示，结合三角形面积公式即可列方程求解.

[步骤拆解]

解：(1)由余弦定理得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}ab}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，(2分)

根据已知条件及余弦定理特点选择相应的公式.

基点·难点·重点　讲清·讲透·讲活

作业手册

课时作业

夯实基础 稳扎稳打

综合提升 严选习题

第58讲　随机事件的相互独立性与条件概率、全概率公式 (时间：45分钟)

夯实基础

1. [2024·广东湛江期末] 掷两枚质地均匀的骰子，设A="第一枚出现奇数点"，B="第二枚出现偶数点"，则A与B的关系为（　）

A. 互斥　B. 包含

C. 互为对立　D. 相互独立

6. [2025·湖南娄底期末] 长时间玩手机可能影响视力，据调查，某校学生有40%的人近视，而该校有20%的学生每天玩手机超过1 h，这些人的近视率为50%.现从每天玩手机不超过1 h的学生中任意调查一名学生，则他近视的概率为（　）

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{3}{8}$　C. $\frac{5}{8}$　D. $\frac{3}{4}$

综合提升

11. [2024·天津河东区模拟] 已知点$P(x,y)$在直线$x-2y+8=0$上，则$\sqrt{x^2+y^2-4x+4}+\sqrt{x^2+y^2+4x+4}$的最小值为（　）

A. 4　B. 6

C. 8　D. 10

14. 已知$m\in\mathbf{R}$，若过定点A的动直线$l_1:x-my+m-2=0$和过定点B的动直线$l_2:mx+y+2m-4=0$交于点P(P与A，B不重合)，则$|PA|\cdot|PB|$的最大值为______，$2|PA|+|PB|$的最大值为______.

分层训练 满足不同梯度训练需求

薄弱点·疑难点　练熟·练透·练活

目录 CONTENTS

01 第一单元　预备知识

第 1 讲　集合 …… 001
第 2 讲　常用逻辑用语 …… 005
第 3 讲　等式性质与不等式性质 …… 007
第 4 讲　基本不等式 …… 009
第 5 讲　一元二次方程、不等式 …… 012

02 第二单元　函数

第 6 讲　函数的概念及其表示 …… 017
第 7 讲　函数的单调性与最值 …… 021
第 8 讲　函数的奇偶性、周期性、对称性 …… 026
微专题 1　**函数性质的综合应用** …… 028
第 9 讲　二次函数与幂函数 …… 030
第 10 讲　指数与指数函数 …… 034
第 11 讲　对数与对数函数 …… 037
微专题 2　**指、对、幂的大小比较** …… 041
第 12 讲　函数的图象 …… 043
第 13 讲　函数的零点与方程的解 …… 047
第 14 讲　函数模型及其应用 …… 051

03 第三单元　导数及其应用

第 15 讲　导数的概念及其意义、导数的运算 …… 055
第 16 讲　导数与函数的单调性 …… 058
第 17 讲　导数与函数的极值、最值 …… 061
微专题 3　**构造函数问题模型** …… 064
第 18 讲　导数的综合问题 …… 066
　第 1 课时　导数求解不等式恒（能）成立问题 …… 066
　第 2 课时　利用导数研究函数零点 …… 070
✪ **素养导向　解题指引——函数与导数** …… 074

04 第四单元　三角函数与解三角形

第 19 讲　任意角和弧度制与三角函数的概念 …… 076
第 20 讲　同角三角函数的基本关系与诱导公式 …… 080
第 21 讲　两角和、差及倍角公式 …… 083

第 22 讲　简单的三角恒等变换 …… 086
第 23 讲　三角函数的图象与性质 …… 089
第 24 讲　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 及三角函数的应用 …… 093
微专题 4　三角函数中与 ω 范围有关的问题 …… 098
第 25 讲　正弦定理、余弦定理 …… 100
微专题 5　"爪形"三角形问题 …… 104
第 26 讲　余弦定理、正弦定理应用举例 …… 106
✪ 素养导向　解题指引——三角函数与解三角形 …… 109

05 第五单元　平面向量、复数

第 27 讲　平面向量的概念及其线性运算 …… 110
第 28 讲　平面向量基本定理及坐标表示 …… 114
第 29 讲　平面向量的数量积与平面向量应用举例 …… 117
微专题 6　平面向量中的综合问题 …… 120
第 30 讲　复数 …… 124

06 第六单元　数列

第 31 讲　数列的概念与简单表示法 …… 127
微专题 7　由数列的递推关系求通项公式 a_n …… 130
第 32 讲　等差数列 …… 131
第 33 讲　等比数列 …… 134
第 34 讲　数列求和 …… 137
　第 1 课时　分组转化法与错位相减法求和 …… 138
　第 2 课时　裂项相消法求和 …… 139
第 35 讲　数列的综合问题 …… 140
微专题 8　重构数列问题 …… 143
✪ 素养导向　解题指引——数列 …… 145

07 第七单元　立体几何

第 36 讲　空间几何体 …… 146
第 37 讲　空间点、直线、平面之间的位置关系 …… 151
第 38 讲　空间直线与平面的平行 …… 154
第 39 讲　空间直线与平面的垂直 …… 158
第 40 讲　空间向量及其运算和空间位置关系 …… 162
第 41 讲　空间角 …… 165
第 42 讲　空间距离及立体几何中的探索性问题 …… 168
微专题 9　空间动态问题 …… 171

素养导向　解题指引——立体几何 …… 173

08 第八单元　解析几何

第 43 讲　直线的倾斜角与斜率、直线的方程 …… 176
第 44 讲　两直线的位置关系 …… 179
第 45 讲　圆的方程 …… 182
第 46 讲　直线与圆、圆与圆的位置关系 …… 185
第 47 讲　椭圆 …… 189
第 1 课时　椭圆的定义及性质 …… 191
第 2 课时　直线与椭圆的位置关系 …… 193
第 48 讲　双曲线 …… 196
第 49 讲　抛物线 …… 200
第 50 讲　圆锥曲线热点问题 …… 204
第 1 课时　求值、最值与范围、证明问题 …… 205
第 2 课时　定点、定值、探索性问题 …… 208
知识拓展　第二定义、第三定义 …… 211
素养导向　解题指引——圆锥曲线 …… 212

09 第九单元　统计

第 51 讲　随机抽样 …… 214
第 52 讲　统计图表、用样本估计总体 …… 217
第 53 讲　成对数据的统计分析 …… 222

10 第十单元　排列、组合与二项式定理、概率

第 54 讲　两个计数原理 …… 229
第 55 讲　排列与组合 …… 231
第 56 讲　二项式定理 …… 235
第 57 讲　随机事件与概率、古典概型 …… 238
第 58 讲　随机事件的相互独立性与条件概率、全概率公式 …… 242
第 59 讲　离散型随机变量的分布列和数字特征 …… 246
第 60 讲　二项分布与超几何分布、正态分布 …… 250
微专题 10　概率统计与数列、函数的综合问题 …… 255
素养导向　解题指引——概率与统计 …… 257

作业手册　[单独成册 P355～P496]
参考答案（听课手册）　[单独成册 P260～P354]　参考答案（作业手册）　[单独成册 P498～P584]

第一单元　预备知识

第 1 讲　集合

【课标要求】

1. 通过实例,了解集合的含义,理解元素与集合的属于关系.
2. 针对具体问题,能在自然语言和图形语言的基础上,用符号语言刻画集合.
3. 在具体情境中,了解全集与空集的含义.
4. 理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.
5. 理解两个集合的并集与交集的含义,能求两个集合的并集与交集.
6. 理解在给定集合中一个子集的补集的含义,能求给定子集的补集.
7. 能使用 Venn 图表达集合的基本关系与基本运算,体会图形对理解抽象概念的作用.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 集合的有关概念

(1)集合元素的三个特性:________、________、________.

(2)集合的三种表示方法:________、________、________.

(3)元素与集合的两种关系:属于,记为____;不属于,记为____.

(4)六个特定的集合及其关系图:

N* 或 **N**$_+$ 表示__________,**N** 表示非负整数集(或自然数集),**Z** 表示__________,**Q** 表示__________,**R** 表示实数集,**C** 表示________.

2. 集合间的基本关系

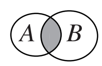
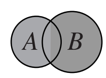
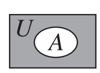
(1)子集:一般地,对于两个集合 A,B,如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素,就称集合 A 为集合 B 的子集,记作________(或 $B\supseteq A$).

(2)真子集:如果集合 $A\subseteq B$,但存在元素 $x\in B$,且 $x\notin A$,就称集合 A 是集合 B 的真子集,记作 A____B(或 B____A).

(3)相等:只要构成两个集合的元素是一样的,我们就称这两个集合是________的.

(4)空集是任何集合的子集,是__________集合的真子集.

3. 集合的基本运算

	文字语言	符号语言	图形语言	记法
交集	属于 A ______ 属于 B 的元素组成的集合	$\{x\mid x\in A,$ ______ $x\in B\}$		______
并集	属于 A ______ 属于 B 的元素组成的集合	$\{x\mid x\in A,$ ______ $x\in B\}$		______
补集	全集 U 中 ______ 属于 A 的所有元素组成的集合	$\{x\mid x\in U,$ x ______ $A\}$		______

4. 集合的运算性质

(1)交集的运算性质:$A\cap B=B\cap A$;$A\cap A=A$;$A\cap\varnothing=\varnothing\cap A=\varnothing$;$A\cap B=A\Leftrightarrow A$______$B$.

(2)并集的运算性质：$A\cup B=$________；$A\cup A=A$；$A\cup\varnothing=\varnothing\cup A=A$；$A\cup B=$______$\Leftrightarrow B\subseteq A$.

(3)补集的运算性质：$A\cup(\complement_U A)=U$；$A\cap(\complement_U A)=$____；$\complement_U(\complement_U A)=$____；$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)$____$(\complement_U B)$；$\complement_U(A\cap B)=$____$\cup$____.

◆◆ 常用结论

(1)集合的关系

①一个集合的真子集必是其子集，一个集合的子集不一定是其真子集.

②任何一个集合是它本身的子集，空集是任何集合的子集.

③子集的传递性：若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$（真子集也满足）.

④若 $A\subseteq B$，则有 $A=\varnothing$ 和 $A\neq\varnothing$ 两种可能.

(2)集合的子集个数和元素个数

①集合子集的个数：若有限集 A 中有 n 个元素，则 A 的子集有 2^n 个，真子集有 (2^n-1) 个，非空子集有 (2^n-1) 个，非空真子集有 (2^n-2) 个.

②集合元素的个数：$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$，$\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(A\cap C)-\mathrm{card}(B\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)$（常用在实际问题中）.

(3)集合的运算

$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow\complement_U A\supseteq\complement_U B$.

课前演练

题组一 易错辨析

判断下列说法是否正确.（请在括号中打"√"或"×"）

(1)若 $1\in\{x^2,x\}$，则 $x=-1$ 或 $x=1$.（　　）

(2)集合 $A=\{y\mid y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x+2,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=\{(-1,1),(2,4)\}$.（　　）

(3)已知集合 $A=\left\{x\,\middle|\,y=\dfrac{1}{x}\right\}$，$B=\left\{y\,\middle|\,y=\dfrac{1}{x-1}\right\}$，则 $A\neq B$.（　　）

题组二 教材改编

1. 设集合 $A=\{x\mid x\geqslant-1\}$，则下列四个关系中正确的是（　　）

A. $1\in A$　　B. $1\notin A$

C. $\{1\}\in A$　　D. $1\subseteq A$

2. 已知全集 $U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid |x|<2\}$，则 $\complement_U A=$（　　）

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{-2,2,3\}$

C. $\{-2,-1,2\}$　　D. $\{-2,0,3\}$

3. 已知集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x<7,x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$，则集合 A,B 间的关系为（　　）

A. $A\in B$　　B. $B\in A$

C. $A=B$　　D. $B\subsetneqq A$

课堂考点探究

探究点一 集合的概念及表示

例 1 (1)[2025·江苏淮安期末] 集合 $A=\{(x,y,z)\mid x\in\{0,1\},y,z\in\{2,3,4\}\}$中元素的个数为（　　）

A. 18　　B. 12

C. 8　　D. 5

(2)若集合 $A=\{x\mid mx^2+2x+m=0,m\in\mathbf{R}\}$中有且只有一个元素，则 m 的取值集合是（　　）

A. $\{-1\}$　　B. $\{0\}$

C. $\{-1,1\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

[听课笔记]

◆◆ 总结反思

(1)用描述法表示集合时，要确定构成集合的元素是什么及这些元素的限制条件是什么.

(2)注意对集合中的元素是否满足互异性进行检验.

(3)遇到含参问题的选择题，可以从选项入手，利用排除法，可把逆向思维问题转化为正向思维问题进行求解.

【对点演练 1】 (1)[2025·河北衡水调研] 下列说法中正确的是 ( )

A. $\{0\}$是空集

B. $\{x|x^2+x+2=0\}$是空集

C. $\{1,2\}$与$\{2,1\}$是不同的集合

D. 方程 $x^2-4x+4=0$ 的解集是$\{2,2\}$

(2)(多选题)下列各组 M,P 中表示不同集合的是 ( )

A. $M=\{3,-1\},P=\{(3,-1)\}$

B. $M=\{(3,1)\},P=\{(1,3)\}$

C. $M=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\},P=\{x|x=t^2+1,t\in\mathbf{R}\}$

D. $M=\{y|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\},P=\{(x,y)|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$

[听课笔记]

探究点二 集合间的基本关系

例 2 (1)[2025·江苏常州模拟] 已知集合 $A=\{x|x^2-2x<0\},B=\{x|2^x>1\}$,则 ( )

A. $A\cap B=\varnothing$　　B. $A\cup B=\mathbf{R}$

C. $A\subseteq B$　　D. $B\subseteq A$

(2)设集合 $M=\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\},N=\{x|x=3n+1,n\in\mathbf{Z}\},P=\{x|x=6n+1,n\in\mathbf{Z}\}$,则 ( )

A. $M\subseteq P$　　B. $N\subseteq P$

C. $P=M\cap N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

判断集合间的基本关系的常用方法:

定义法:根据题中限定条件把集合元素表示出来,然后比较集合元素的异同,从而找出集合之间的关系.

图示法:(1)在同一个数轴上表示出两个集合,比较端点之间的大小关系,从而确定集合与集合之间的关系;(2)借助Venn 图来表示集合间的包含关系.

【对点演练 2】 (1)[2025·湖南衡阳联考] 已知集合 $A=\{1,5\},B=\{1,a+3\}$,若 $A=B$,则实数 a 的值为 ( )

A. -1　　B. 0　　C. -2　　D. 2

(2)已知集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 7\},B=\{x|m+1<x<2m-1\}$,若 $A\cup B=A$,则 ( )

A. $-3\leqslant m\leqslant 4$　　B. $2<m<4$

C. $m<4$　　D. $m\leqslant 4$

[听课笔记]

探究点三 集合的基本运算

题型 1 集合的运算

例 3 (1)[2024·新课标Ⅰ卷] 已知集合 $A=\{x|-5<x^3<5\},B=\{-3,-1,0,2,3\}$,则 $A\cap B=$ ( )

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{2,3\}$

C. $\{-3,-1,0\}$　　D. $\{-1,0,2\}$

(2)已知全集 $U=\{x|x>0\}$,集合 $A=\{x|1\leqslant x<2\}$,则 $\complement_U A=$ ( )

A. $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

B. $(0,1)\cup[2,+\infty)$

C. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

D. $(0,1)\cup(2,+\infty)$

(3)[2024·北京卷] 已知集合 $M=\{x|-3<x<1\}$,$N=\{x|-1\leqslant x<4\}$,则 $M\cup N=$ ( )

A. $\{x|-1\leqslant x<1\}$

B. $\{x|x>-3\}$

C. $\{x|-3<x<4\}$

D. $\{x|x<4\}$

[听课笔记]

题型 2 利用集合的运算求参数的值(范围)

例 4 (1)[2025·陕西铜川模拟] 已知集合 $A=\{1,2,m\},B=\{x|x^2-2x-3<0\}$,若 $A\cup B=B$,则实数 m 的值可能是 ( )

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

(2)(多选题)[2025·江西宜春期末] 设 $A=\{x|x^2-5x+4=0\}$，$B=\{x|ax-1=0\}$，若 $A\cap B=B$，则实数 a 的值可以是 ( )

A. 0　　B. $\frac{1}{4}$

C. 4　　D. 1

[听课笔记]

◆◆ 总结反思

1. 对于已知集合的运算，可根据集合的交集、并集和补集的定义直接求解，也可结合数轴以及 Venn 图求解.

2. 根据集合运算求参数，要把集合语言先转换为方程或不等式，然后解方程或不等式，再利用数形结合求解. 解题过程中要注意的几点：(1)端点值能否取到；(2)讨论二次项系数是否为零；(3)使用根与系数的关系的前提应满足 $\Delta\geqslant 0$.

【对点演练 3】 (1)[2025·福州质检] 已知集合 $A=\{x|x^2-4x-5\leqslant 0\}$，$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 6\}$，则 $A\cap B=$ ( )

A. $\{x|-5\leqslant x\leqslant 6\}$　　B. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 6\}$

C. $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$　　D. $\{x|0\leqslant x\leqslant 5\}$

(2)若集合 $A=\{1,9,a^2\}$，$B=\{9,3a\}$，则满足 $A\cap B=B$ 的实数 a 的个数为 ( )

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

(3)[2025·河北石家庄模拟] 已知集合 $A=\{x|x^2-4x-5<0\}$，$B=\{x|(x-m)[x-(m+2)]>0\}$，若 $A\cup B=\mathbf{R}$，则实数 m 的取值范围是 ( )

A. $(-1,+\infty)$　　B. $(-\infty,3]$

C. $(-1,3)$　　D. $[-1,3]$

[听课笔记]

探究点四　集合的新定义问题

例 5 [2025·四川成都模拟] 定义：如果集合 U 存在一组两两不交(两个集合的交集为空集时，称为不交)的非空真子集 $A_1,A_2,\cdots,A_k(k\in\mathbf{N}^*,k>1)$，且 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k=U$，那么称子集族 $\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 构成集合 U 的一个 k 划分. 已知集合 $I=\{x\in\mathbf{N}|x^2-6x+5<0\}$，则集合 I 的所有划分的个数为 ( )

A. 3　　B. 4

C. 14　　D. 16

[听课笔记]

◆◆ 总结反思

破解集合新定义问题的关键：

(1)读懂新定义：首先分析新定义的特点，把新定义所叙述的问题的本质弄清楚，应用到具体的解题过程之中.

(2)会转化：解题时要善于从试题中发现可以使用集合性质的一些因素进行转化，化陌生问题为熟悉的问题.

【对点演练 4】 (1)定义集合 A,B 的一种运算：$A\otimes B=\{x|x=b^2-a,a\in A,b\in B\}$. 若 $A=\{1,4\}$，$B=\{-1,2\}$，则 $A\otimes B$ 中的元素个数为 ( )

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

(2)定义集合运算：$A\oplus B=\left\{(x,y)\left|\frac{x}{2}\in A,\frac{2}{y}\in B\right.\right\}$. 若集合 $A=B=\{x\in\mathbf{N}|1<x<4\}$，$C=\left\{(x,y)\left|y=-\frac{1}{6}x+\frac{5}{3}\right.\right\}$，则 $(A\oplus B)\cap C=$ ( )

A. $\varnothing$　　B. $\{(4,1)\}$

C. $\left\{\left(1,\frac{3}{2}\right)\right\}$　　D. $\left\{(4,1),\left(6,\frac{2}{3}\right)\right\}$

[听课笔记]

第 2 讲　常用逻辑用语

【课标要求】 1. 通过对典型数学命题的梳理，理解必要条件、充分条件、充要条件的意义，理解性质定理与必要条件的关系、判定定理与充分条件的关系、数学定义与充要条件的关系.

2. 通过已知的数学实例，理解全称量词与存在量词的意义.

3. 能正确使用存在量词对全称量词命题进行否定，能正确使用全称量词对存在量词命题进行否定.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 充分条件、必要条件与充要条件的概念

若 $p \Rightarrow q$，则 p 是 q 的________条件，q 是 p 的________条件	
p 是 q 的____________条件	$p \Rightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$
p 是 q 的____________条件	$p \nRightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$
p 是 q 的________条件	$p \Leftrightarrow q$
p 是 q 的____________条件	$p \nRightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$

2. 全称量词与存在量词

(1)短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫作__________，并用符号“____”表示.

(2)短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫作__________，并用符号“____”表示.

(3)含有一个量词的命题的否定：

全称量词命题：$\forall x \in M$，$p(x)$，它的否定：____________.

存在量词命题：$\exists x \in M$，$p(x)$，它的否定：____________.

◆◆ 常用结论

1. 充要条件的两个结论：

(1)若 p 是 q 的充分不必要条件，q 是 r 的充分不必要条件，则 p 是 r 的充分不必要条件；

(2)若 p 是 q 的充分不必要条件，则 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件.

2. 充分、必要条件与集合的关系

使 p 成立的对象构成的集合为 A，使 q 成立的对象构成的集合为 B	
p 是 q 的充分条件	$A \subseteq B$
p 是 q 的必要条件	$B \subseteq A$
p 是 q 的充分不必要条件	$A \subsetneqq B$
p 是 q 的必要不充分条件	$B \subsetneqq A$
p 是 q 的充要条件	$A = B$

课前演练

题组一　易错辨析

判断下列说法是否正确.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)全称量词命题一定含有全称量词.　　(　　)

(2)“有些三角形中三个内角相等”是存在量词命题.　　(　　)

(3)$a=1$ 是 $a^2=1$ 的充要条件.　　(　　)

(4)$a>0$，$b>0$ 成立的一个必要不充分条件是 $a+b>0$.　　(　　)

题组二　教材改编

1. 下列不能说明“$\exists x, y \in \mathbf{R}$，$x^2+y^2-2x=1$”为真命题的条件是　　(　　)

A. $(x,y)=(0,1)$

B. $(x,y)=(0,-1)$

C. $(x,y)=(2,1)$

D. $(x,y)=(-2,1)$

2. 下列命题中是假命题的是　　(　　)

A. $\exists x \in \mathbf{R}$，$\lg x=1$

B. $\exists x \in \mathbf{R}$，$\sin x=0$

C. $\forall x \in \mathbf{R}$，$x^3>0$

D. $\forall x \in \mathbf{R}$，$2^x>0$

3. 对于实数 x，“$x<0$”是“$x<1$”的　　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

探究点一　充分条件与必要条件

例 1 (1)“$2^x>1$”是“$x>1$”的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

(2)[2025・湖南长沙期末] 已知集合$M=\{1,2,3\}$, $N=\{x\in\mathbf{Z} \mid |x-2|\leqslant a\}$,若$x\in M$是$x\in N$的充要条件,则整数$a=$　(　　)

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

充分条件、必要条件的两种判定方法:

(1)定义法:根据$p\Rightarrow q$,$q\Rightarrow p$进行判断,适用于定义、定理判断性问题.

(2)集合法:根据p,q对应的集合之间的包含关系进行判断,多适用于条件中涉及参数范围的推断问题.

【对点演练 1】 (1)已知集合M,N,则“$M\cap N=M$”是“$M\cup N=N$”的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

(2)[2024・山东济南二模] 已知$A=\{x \mid 1<x<2\}$, $B=\{x \mid x<a\}$,若$x\in A$是$x\in B$的充分不必要条件,则a的取值范围是　(　　)

A. $a\leqslant 1$　　B. $a\geqslant 1$

C. $a\leqslant 2$　　D. $a\geqslant 2$

(3)(多选题)已知$A=\{x \mid x^2-8x+15=0\}$,$B=\{x \mid ax-1=0\}$,若$x\in B$是$x\in A$的充分不必要条件,则实数a的值可以为　(　　)

A. $\frac{1}{5}$　　B. 0　　C. 3　　D. $\frac{1}{3}$

[听课笔记]

探究点二　全称量词与存在量词

题型 1　含量词命题的否定

例 2 [2025・四川成都七中模拟] “$\exists x>0$,$x^2-x+4\leqslant 0$”的否定为　(　　)

A. $\forall x>0$,$x^2-x+4>0$

B. $\forall x\leqslant 0$,$x^2-x+4>0$

C. $\exists x>0$,$x^2-x+4>0$

D. $\forall x\leqslant 0$,$x^2-x+4\leqslant 0$

[听课笔记]

题型 2　含量词命题的真假判定

例 3 (多选题)下列命题既是存在量词命题又是真命题的是　(　　)

A. $\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2-3x+5>0$

B. $\exists x\in\mathbf{R}$,$x^2-3x+\sqrt{2}>0$

C. 至少存在两个质数的平方是偶数

D. 存在一个直角三角形的三个内角成等差数列

[听课笔记]

题型 3　由含量词命题的真假求参数范围

例 4 (1)已知集合$A=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant a\}$,$B=\{x \mid m^2+3\leqslant x\leqslant m^2+4\}$,若“$\exists m\in\mathbf{R}$,$A\cap B\neq\varnothing$”为假命题,则实数$a$的取值范围为　(　　)

A. $(0,4)$　　B. $(1,5)$

C. $(-\infty,3)$　　D. $(-\infty,4)$

(2)[2025・哈师大附中、东北师大附中、辽宁省实验中学联考] 若“$\forall x\in[1,3]$,$a\leqslant 2^x+2^{-x}$”为假命题,则实数a的取值范围是________.

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

1. 全称量词命题的否定是把“全称量词”改为“存在量词”,然后对原命题的结论进行否定;存在量词命题的否定是把“存在量词”改为“全称量词”,然后对原命题的结论进行否定.

2. 全称量词命题与存在量词命题真假的判断方法:对于全称量词命题,所有对象都能使命题为真,则这个全称量词命题为真命题;对于存在量词命题,只要有一个对象使命题为真,则这个存在量词命题为真命题.

3. 应用充分条件、必要条件求解参数范围的方法：

(1)把充分条件、必要条件或充要条件转化为集合之间的关系，然后根据集合之间的关系列出关于参数的不等式(或不等式组)求解；

(2)检验区间的端点值，不等式是否能够取等号决定端点值的取舍，处理不当容易出现漏解或增解的现象.

【对点演练 2】 (1)“$\forall a<2, f(x)=x^2-ax$ 是奇函数”的否定是　(　　)

A. $\forall a\geqslant 2, f(x)=x^2-ax$ 是偶函数

B. $\exists a\geqslant 2, f(x)=x^2-ax$ 是奇函数

C. $\exists a<2, f(x)=x^2-ax$ 是偶函数

D. $\exists a<2, f(x)=x^2-ax$ 不是奇函数

(2)(多选题)[2025 · 广东韶关期末] 下列命题中是假命题的有　(　　)

A. 存在整数 x, y，使得 $2x+4y=3$

B. $\exists a\in\mathbf{R}$，关于 x 的方程 $x^2+ax-1=0$ 无实数根

C. $\forall x\in\mathbf{N}, \sqrt{x^2+1}\neq 1$

D. $\exists n\in\mathbf{N}^*$，$2n^2+5n+2$ 能被 2 整除

(3)已知 $p: \forall x\in[-1,0], a\leqslant\frac{1}{2^x}-5x$，若 p 为假命题，则实数 a 的取值范围是________.

[听课笔记]

第 3 讲　等式性质与不等式性质

【课标要求】 梳理等式的性质，理解不等式的概念，掌握不等式的性质.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 两个实数比较大小的方法

(1)作差法 $\begin{cases} a-b>0\Leftrightarrow a\_\_\_\_ b, \\ a-b=0\Leftrightarrow a\_\_\_\_ b, \\ a-b<0\Leftrightarrow a\_\_\_\_ b. \end{cases}$

(2)作商法

$\begin{cases} \frac{a}{b}>1(a\in\mathbf{R}, b>0)\Leftrightarrow a\_\_\_\_ b(a\in\mathbf{R}, b>0), \\ \frac{a}{b}<1(a\in\mathbf{R}, b>0)\Leftrightarrow a\_\_\_\_ b(a\in\mathbf{R}, b>0). \end{cases}$

2. 等式的性质

(1)若 $a=b$，则 $b=a$；

(2)若 $a=b, b=c$，则 $a=c$；

(3)若 $a=b$，则对任意 c，都有________或________或________；

(4)若 $a=b$，则对任意不为零的 c，都有________.

3. 不等式的性质

(1)对称性：$a>b\Leftrightarrow$________(双向性).

(2)传递性：$a>b, b>c\Rightarrow a>c$(单向性).

(3)可加性：$a>b\Leftrightarrow a+c$____$b+c$(双向性).

(4)可乘性：$a>b, c>0\Rightarrow ac$____bc；

$a>b, c<0\Rightarrow ac$____bc.

(5)$a>b, c>d\Rightarrow$________(单向性).

(6)$a>b>0, c>d>0\Rightarrow ac$____$bd$(单向性).

(7)乘方法则：$a>b>0\Rightarrow a^n$____b^n($n\in\mathbf{N}$, $n\geqslant 2$)(单向性).

◆◆ 常用结论

1. 若 $a<x<b, c<y<d$，则 $a-d<x-y<b-c$.

2. 已知 a, b, m 都是正数，且 $a>b$，则

(1)$\frac{b-m}{a-m}<\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}(b-m>0)$，即真分数越加越大，越减越小；

(2)$\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}<\frac{a-m}{b-m}(b-m>0)$，即假分数越加越小，越减越大.

课前演练

题组一　易错辨析

判断下列说法是否正确.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)实数 a 不大于 -2，用不等式表示为 $a\geqslant -2$.　(　　)

(2)$x^2>y^2$ 的充要条件是 $|x|>|y|$.　(　　)

(3)若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$.　(　　)

(4)不等式 $\frac{x-1}{x+2}\leqslant 2$ 的解集是 $[-5,+\infty)$.　(　　)

题组二 教材改编

1. 已知 a,b,c 都是实数,若 $a>b$,则下列不等式一定成立的是 ( )

A. $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$ B. $ac>bc$

C. $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ D. $a-c>b-c$

2. 已知 a,b,c,d 为实数,$a>b$ 且 $c>d$,则下列不等式一定成立的是 ( )

A. $ac>bd$ B. $a+c>b+d$

C. $ac<bd$ D. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

3. 已知 $a=\sqrt{6}+\sqrt{10}$,$b=2\sqrt{3}+2$,则 a,b 的大小关系是 ( )

A. $a>b$ B. $a=b$

C. $a<b$ D. 无法确定

4. 已知 $1\leqslant a\leqslant 4$,$-1\leqslant b\leqslant 2$,则 $3a-b$ 的取值范围是 ( )

A. $-13\leqslant 3a-b\leqslant 1$

B. $-1\leqslant 3a-b\leqslant 8$

C. $-1\leqslant 3a-b\leqslant 13$

D. $1\leqslant 3a-b\leqslant 13$

课堂考点探究

探究点一 比较数(式)的大小

例 1 (1)已知 $a=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$,$b=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$,$c=a^2$,则 ( )

A. $c>a>b$ B. $b>c>a$

C. $c>b>a$ D. $b>a>c$

(2)[2025·陕西西安一中模拟] 若 $a=0.31^{1.5}$,$b=\log_3 12$,$c=\log_2 6$,$d=\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}$,则有 ( )

A. $a>b>c$ B. $b>a>d$

C. $c>a>b$ D. $b>c>a$

(2)若实数 m,n,p 满足 $m=4e^{\frac{3}{5}}$,$n=5e^{\frac{2}{3}}$,$p=\frac{18}{e^2}$,则 ( )

A. $p<m<n$ B. $p<n<m$

C. $m<p<n$ D. $n<p<m$

(3)设 $a=\sqrt{7}$,$b=3-\sqrt{3}$,则 a________b.(填“>”或“<”)

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

比较两个数(或式子)的大小可以利用不等式的性质直接判断,也可以用作差法或作商法.作差法最后要变成因式相乘或相除的形式,然后差值与 0 比较大小;作商法一般要先判断两个量的正负,然后作商,商值与 1 比较大小.

【对点演练 1】 (1)(多选题)[2025·福建福州期末] 已知 $a<b<0$,$c\in\mathbf{R}$,则下列不等式一定成立的是 ( )

A. $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$ B. $ac^3<bc^3$

C. $a^2>b^2$ D. $\frac{1}{b}+a<\frac{1}{a}+b$

探究点二 不等式的性质及应用

题型 1 不等式的性质

例 2 (1)[2025·北京师大附中模拟] 若 $a<b$ 且 $ab\neq 0$,则下列不等式中一定成立的是 ( )

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ B. $\frac{b}{a}>1$

C. $a^3<b^3$ D. $|a|<|b|$

(2)(多选题)已知 $b>a>0$,$c\in\mathbf{R}$,则下列不等式中一定成立的是 ( )

A. $a^{\frac{1}{2}}<b^{\frac{1}{2}}$ B. $\frac{1}{a}-c<\frac{1}{b}-c$

C. $\frac{a+2}{b+2}>\frac{a}{b}$ D. $ac^2<bc^2$

[听课笔记]

题型 2　不等式的应用

例 3 [2025·江西南昌大学附中期末] 已知某个三角形的两条高的长度分别为 5 和 10，则该三角形第三条高的长度的取值范围为　　(　　)

A. $\left(\frac{5}{3},\frac{5}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{5}{2},\frac{10}{3}\right)$

C. $\left(\frac{10}{3},10\right)$　　D. $(10,15)$

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

1. 在应用不等式的性质时，一定要搞清它们成立的前提条件，不可强化或弱化成立的条件；
2. 要注意"箭头"是单向的还是双向的，也就是说每条性质是否具有可逆性；
3. 在解决与不等关系有关的实际问题时，要读懂题意，用适当的不等号将相关数(或式)联系起来，还要注意字母的实际意义.

【对点演练 2】 (1)若 $a,b,c\in\mathbf{R}$，$a>b$，则下列不等式一定成立的是　　(　　)

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B. $a^2>b^2$

C. $\frac{a}{c^2+1}>\frac{b}{c^2+1}$　　D. $a|c|>b|c|$

(2)新学期开学之际，某校计划用不超过 1500 元的资金购买单价分别为 120 元的篮球和 140 元的足球. 已知该校至少要购买 8 个篮球，且至少购买 2 个足球，则不同的选购方式有　　(　　)

A. 6 种　　B. 7 种　　C. 8 种　　D. 5 种

(3)(多选题)[2025·四川德阳质检] 设 a,b,c,d 为实数，且 $a>b>0>c>d$，则下列不等式一定成立的是　　(　　)

A. $ac<bc$　　B. $a-b<c-d$

C. $ad>bc$　　D. $\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$

[听课笔记]

第 4 讲　基本不等式

【课标要求】 1. 探索并了解基本不等式的证明过程.
2. 能用基本不等式解决简单的最大值或最小值问题.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 基本不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$

(1)基本不等式成立的条件：________.

(2)等号成立的条件：当且仅当________时取等号.

2. 几个重要的不等式

(1)$a^2+b^2\geqslant$________$(a,b\in\mathbf{R})$.

(2)$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant$________$(a,b$ 同号$)$.

(3)$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(a,b\in\mathbf{R})$.

(4)$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}(a,b\in\mathbf{R})$.

3. 算术平均数与几何平均数

给定两个正数 a,b，数________称为 a,b 的算术平均数；数 $\sqrt{ab}$ 称为 a,b 的几何平均数. 基本不等式可叙述为：________________.

4. 利用基本不等式求最值问题

已知 $x>0,y>0$.

(1)如果积 xy 是定值 p，那么当且仅当 $x=y$ 时，$x+y$ 取得最小值，是________.（简记：积定和最小）

(2)如果和 $x+y$ 是定值 p，那么当且仅当 $x=y$ 时，xy 取得最大值，是________.（简记：和定积最大）

◆◆ 常用结论

1. 若 $x\neq0$,则 $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant2$,当且仅当 $x=\pm1$ 时,等号成立.

2. 若 $ab\neq0$,则 $\left|\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right|\geqslant2$,当且仅当 $a=\pm b$ 时,等号成立.

3. 若 $ab>0,x\neq0$,则 $\left|ax+\frac{b}{x}\right|\geqslant2\sqrt{ab}$,当且仅当 $x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ 时,等号成立.

课前演练

题组一　易错辨析

判断下列说法是否正确.(请在括号中打"√"或"×")

(1)对任意 $a,b\in\mathbf{R}$,$a^2+b^2\geqslant2ab$ 恒成立.　(　　)

(2)若 $a>0,b>0$,则 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.　(　　)

(3)当 a,b 同号时,$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant2$.　(　　)

题组二　教材改编

1. 已知 $x>0$,则 $y=x+\frac{4}{x}$ 的最小值为　(　　)

A. 2　B. 4

C. -2　D. -4

2. 已知 $x>0,y>0$,且 $x+y=2$,则　(　　)

A. xy 的最大值为 1

B. xy 的最小值为 1

C. xy 的最大值为$\sqrt{2}$

D. xy 的最小值为$\sqrt{2}$

3. 已知 $4a^2+b^2=6$,则 ab 的最大值为　(　　)

A. $\frac{3}{4}$　B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{5}{2}$　D. 3

课堂考点探究

探究点一　利用基本不等式求最值

题型 1　配凑法求最值

例 1 (1)已知$m<8$,则 $m+\frac{4}{m-8}$的最大值为　(　　)

A. 4　B. 6　C. 8　D. 10

(2)[2025·山东青岛期末] 已知 $x>1,y>3,(x-1)(y-3)=1$,则 $x+y$ 的最小值为　(　　)

A. 2　B. 4　C. 6　D. 8

[听课笔记]

题型 2　常数代换法求最值

例 2 (1)[2025·江苏南通模拟] 已知 $m,n\in(0,+\infty)$,且 $m+n=1$,则$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的最小值为　(　　)

A. 5　B. 4　C. 3　D. 2

(2)(多选题)若正数 x,y 满足 $2x+y=xy$,则(　　)

A. $xy\leqslant8$　B. $8x+y\geqslant18$

C. $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}\geqslant\frac{1}{2}$　D. $\frac{3}{x-1}+\frac{1}{y-2}\geqslant\sqrt{6}$

[听课笔记]

题型 3　消元法求最值

例 3 设正实数 x,y,z 满足 $x^2-xy+y^2-z=0$,则$\frac{xy}{z}$的最大值为　(　　)

A. 4　B. 3

C. 2　D. 1

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

1. 配凑法就是将相关代数式进行适当的变形,通过添项、拆项等方法凑成和为定值或积为定值的形式,然后利用基本不等式求解最值的方法.配凑法的实质是代数式的灵活变形,配系数、凑常数是关键.

2. 常数代换法主要解决形如"已知 $mx+ny=t$(t 为不等于 0 的常数),求 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ 的最值"或"已知 $\frac{m}{x}+\frac{n}{y}=t$($t$ 为不等于 0 的常数),求 $ax+by$ 的最值"的问题,通常将 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ 转化为 $\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)\cdot\frac{mx+ny}{t}$ 或将 $ax+by$ 转化为 $\left(\frac{m}{x}+\frac{n}{y}\right)\cdot\frac{ax+by}{t}$,再利用基本不等式求最值.

3. 通过消元法利用基本不等式求最值的策略:当所求最值的代数式中的变量比较多时,通常考虑利用已知条件消去部分变量后,凑出"和为常数"或"积为常数",最后利用基本不等式求最值.

【对点演练 1】 (1)[2025·四川遂宁期末] 若 $a>1$,则 $4a+\frac{1}{a-1}$ 的最小值为 ( )

A. 4 B. 6 C. 8 D. 不存在

(2)已知 $x>1,y>0,x+y=2$,则 $(x-1)y$ 的最大值是 ( )

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{4}{9}$ D. 1

(3)若两个正实数 x,y 满足 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=2$,且不等式 $x+\frac{y}{4}<m^2-m$(m 为常数)有解,则实数 m 的取值范围是 ( )

A. $(-1,2)$ B. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

C. $(-2,1)$ D. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

[听课笔记]

探究点二 基本不等式的变形应用

例 4 已知 $0<a<1,b>1$,则下列不等式一定成立的是 ( )

A. $a+b<\frac{4ab}{a+b}$ B. $\sqrt{ab}<\frac{2ab}{a+b}$

C. $\sqrt{2a^2+2b^2}<2\sqrt{ab}$ D. $a+b<\sqrt{2a^2+2b^2}$

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

基本不等式的常见变形

(1) $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$.

(2) $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ $(a>0,b>0)$.

【对点演练 2】 (多选题)已知 $a>0,b>0$,则下列不等式一定成立的是 ( )

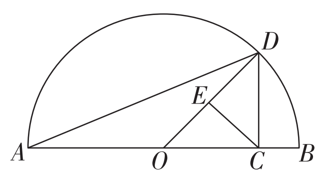
A. $a+b+\frac{1}{\sqrt{ab}}\geqslant2\sqrt{2}$ B. $\frac{2ab}{a+b}\geqslant\sqrt{ab}$

C. $\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\geqslant a+b$ D. $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant4$

[听课笔记]

探究点三 基本不等式的实际应用

例 5 《几何原本》中的几何代数法(以几何方法研究代数问题)成为了后世数学家处理问题的重要依据.通过这一原理,很多的代数公理或定理都能够通过图形实现证明,也称之为无字证明.如图所示的图形中,在 AB 上取一点 C,使得 $AC=a,BC=b$,且 $a>0,b>0,a\neq b$,过点 C 作 $CD\perp AB$ 交以 AB 为直径的半圆弧于点 D,取 AB 的中点 O,连接 OD,作 $CE\perp OD$,垂足为 E,由 $CD>DE$ 可以直接证明的不等式是 ( )



A. $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ B. $a^2+b^2>\sqrt{ab}$

C. $\left|\frac{a-b}{2}\right|<\sqrt{ab}$ D. $\sqrt{ab}>\frac{2ab}{a+b}$

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

利用基本不等式解决实际问题的策略

(1)根据实际问题抽象出函数的解析式,再利用基本不等式求得函数的最值;

(2)解应用题时,一定要注意变量的实际意义及其取值范围;

(3)在应用基本不等式求函数最值时,若等号取不到,可利用函数的单调性求解.

【对点演练 3】［2025·江苏徐州期末］已知 A,B 为东西方向的海岸线上相距 12 km 的两地(B 在 A 的东侧),C 是 A,B 之间距 A 地 3 km 处的一地,在 C 地正南方向 3 km 处有一海岛 P,由海岛 P 开往海岸的小船以 10 km/h 的速度按直线方向航行.一快递员以 v km/h 的速度从 A 地向 B 地骑行,同时某人乘小船从海岛 P 向海岸出发,两人恰好相遇于 C,B 之间的 E 地,且距 C 地 x km$(0<x<9)$,求快递员的速度的最大值.

[听课笔记]

第 5 讲　一元二次方程、不等式

【课标要求】

1. 会结合一元二次函数的图象,判断一元二次方程实根的存在性及实根的个数,了解函数的零点与方程根的关系.
2. 经历从实际情境中抽象出一元二次不等式的过程,了解一元二次不等式的现实意义,能借助一元二次函数求解一元二次不等式,并能用集合表示一元二次不等式的解集.
3. 借助一元二次函数的图象,了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 一元二次不等式

把只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是 2 的不等式,称为一元二次不等式,其一般形式为 $ax^2+bx+c>0$ 或______________$(a,b,c$ 均为常数$,a\neq0)$.

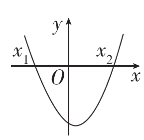
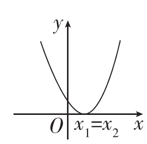
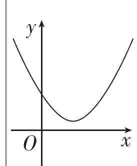
2. 一元二次不等式的解法步骤

(1)将不等式化为右边为零,左边为二次项系数大于零的不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$或$ax^2+bx+c<0(a>0)$.

(2)求出相应的一元二次方程的根.

(3)利用二次函数的图象与 x 轴的交点确定一元二次不等式的解集.

3. 一元二次不等式与相应的二次函数及一元二次方程的关系

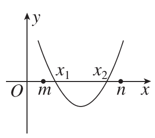
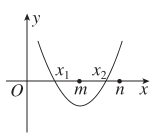
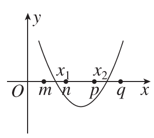
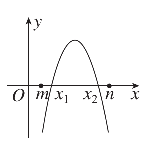
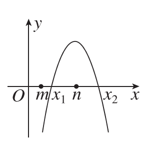
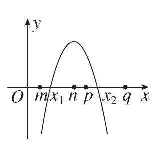
判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 的图象			

（续表）

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ 的根	有两个不相等的实数根 x_1,x_2 $(x_1<x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$ 的解集	______	______	**R**
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$ 的解集	______	$\varnothing$	$\varnothing$

4. 一元二次方程根的分布

设函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，且 $f(x)=0$ 的两实根分别为 x_1,x_2.

分布情况	两实根都在 (m,n) 内	两实根有且仅有一根在 (m,n) 内	一根在 (m,n) 内，另一根在 (p,q) 内 $(p\geqslant n)$
大致图象 $(a>0)$			
得出的结论	$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ f(m)>0,\\ f(n)>0,\\ m<-\dfrac{b}{2a}<n\end{cases}$	$f(m)\cdot f(n)<0$	$\begin{cases}f(m)>0,\\ f(n)<0,\\ f(p)<0,\\ f(q)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(m)f(n)<0,\\ f(p)f(q)<0\end{cases}$
大致图象 $(a<0)$			
得出的结论	$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ f(m)<0,\\ f(n)<0,\\ m<-\dfrac{b}{2a}<n\end{cases}$	$f(m)\cdot f(n)<0$	$\begin{cases}f(m)<0,\\ f(n)>0,\\ f(p)>0,\\ f(q)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(m)f(n)<0,\\ f(p)f(q)<0\end{cases}$

◆◆ 常用结论

1. 一元二次不等式恒成立问题

(1)不等式 $ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$，$x\in\mathbf{R}$ 恒成立 $\Leftrightarrow a>0$ 且 $\Delta<0$；

(2)不等式 $ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$，$x\in\mathbf{R}$ 恒成立 $\Leftrightarrow a<0$ 且 $\Delta<0$.

2. 简单分式不等式

(1) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)g(x)\geqslant 0,\\ g(x)\neq 0;\end{cases}$

(2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)g(x)>0$.

3. 能成立问题的转化：$a>f(x)$ 能成立 $\Rightarrow a>f(x)_{\min}$；$a\leqslant f(x)$ 能成立 $\Rightarrow a\leqslant f(x)_{\max}$.

课前演练

题组一　易错辨析

判断下列说法是否正确.（请在括号中打“√”或“×”）

(1)关于 x 的一元二次方程 $mx^2-5x=0$ 的两实根分别是 $0,\dfrac{5}{m}$.　（　）

(2)若关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a<0)$ 没有实数根，则关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 **R**.　（　）

(3)如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向上，那么不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集一定不是空集.　（　）

(4)关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集可能是 $(m,+\infty)$（m 为常数）.　（　）

题组二　教材改编

1. 不等式 $-x^2-x+6>0$ 的解集为　（　）

A. $\{x|-2<x<3\}$

B. $\{x|-3<x<2\}$

C. $\{x|x<-2$，或 $x>3\}$

D. $\{x|x<-3$，或 $x>2\}$

2. 已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $(1,2)$，则关于 x 的不等式 $cx^2+bx+a>0$ 的解集是________（用集合表示）.

3. 若不等式 $ax^2-ax+a+1>0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为________.

探究点一　求解一元二次不等式

题型 1　不含参数的不等式

例 1 (1)[2025·浙江名校协作体联考] 已知集合 $A=\{x|x\geqslant 1\}$,$B=\{x|2x^2-5x-3<0\}$,则 $A\cup B=$ (　　)

A. $\{x|x\geqslant 1\}$　　B. $\left\{x\middle|x>-\dfrac{1}{2}\right\}$

C. $\left\{x\middle|1<x<\dfrac{3}{2}\right\}$　　D. $\{x|1\leqslant x<3\}$

(2)若 $A=\{x|x^2<1\}$,$B=\{x|y=\ln(-x^2+2x)\}$,则 $A\cap B=$ (　　)

A. $(-1,2)$　　B. $[0,1)$

C. $(0,1)$　　D. $(-1,0)$

[听课笔记]

题型 2　含参数的不等式

例 2 (1)设 a 为实数,则关于 x 的不等式 $(ax-1)(x+2)>0$ 的解集不可能是 (　　)

A. $(-\infty,-2)$

B. $\left(-\infty,\dfrac{1}{a}\right)\cup(-2,+\infty)$

C. $\left(\dfrac{1}{a},-2\right)$

D. $\left(-2,\dfrac{1}{a}\right)$

(2)(多选题)[2025·广东潮州期末] 已知 a 为实数,则关于 x 的一元二次不等式 $(x-a)(x-2)<0$ 的解集可能为 (　　)

A. $(-\infty,2)\cup(a,+\infty)$

B. $(-\infty,a)\cup(2,+\infty)$

C. $(a,2)$

D. $\varnothing$

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

(1)解含参数的一元二次不等式的一般步骤

讨论二次项的系数 → 若二次项含有参数,则应讨论参数小于0还是大于0,然后将不等式转化为二次项系数为正的形式

↓

判断方程根的个数 → 判断方程的实根个数,讨论判别式Δ与0的关系

↓

写出解集 → 确定无实根时可直接写出解集,确定方程有两个实根时,要讨论两实根的大小关系,从而确定解集形式

(2)在处理分式不等式过程中,如果不能确定分母正负,则可先进行移项,将分式不等式转化为整式不等式,可避免去分母过程中产生的分类讨论.

【对点演练 1】 (1)若 $0<m<1$,则关于 x 的不等式 $(x-m)\left(x-\dfrac{1}{m}\right)<0$ 的解集为 (　　)

A. $\left\{x\middle|\dfrac{1}{m}<x<m\right\}$　　B. $\left\{x\middle|x>\dfrac{1}{m}\text{或 }x<m\right\}$

C. $\left\{x\middle|x<\dfrac{1}{m}\text{或 }x>m\right\}$　　D. $\left\{x\middle|m<x<\dfrac{1}{m}\right\}$

(2)已知关于 x 的不等式 $x^2-(1+2a)x+2a<0$ 的解集中不含有整数,则实数 a 的取值范围为 (　　)

A. $(0,1)$

B. $\left[0,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right]$

C. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

D. $[0,1]$

(3)[2025·北京大学附中期末] 不等式 $x^2-2|x|-15>0$ 的解集是________.

[听课笔记]

探究点二　三个二次间的关系

例 3 (1)关于 x 的一元二次方程 $(x-a)(x-a-2)=0$ 有一个正实根和一个负实根的一个充分不必要条件是 (　　)

A. $a\in(2,1)$

B. $a\in(-2,0)$

C. $a\in(-1,0)$

D. $a\in(-1,1)$

(2)若关于 x 的方程 $x^2-2ax+a+2=0$ 在区间 $(-2,1)$ 上有两个不相等的实数解,则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $\left(-\frac{6}{5},-1\right)$

B. $\left(-\frac{6}{5},1\right)$

C. $\left(-\infty,-\frac{6}{5}\right)\cup(-1,+\infty)$

D. $\left(-\infty,-\frac{6}{5}\right)\cup(1,+\infty)$

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

在求解根的分布问题时,要结合根与系数的关系或方程所对应的函数的函数值大小,转化为代数问题进行求解.

【对点演练 2】 (1)已知 p:$a>1$ 或 $a<-1$,q:关于 x 的方程 $x^2-ax+1=0$ 有实数根,则 p 是 q 的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

(2)若关于 x 的一元二次方程 $x^2-2ax+4=0$ 有两个实根,且一个实根小于 1,另一个实根大于 2,则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,-2)$

B. $(2,+\infty)$

C. $\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$

D. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

[听课笔记]

探究点三　一元二次不等式恒成立问题

题型 1　在 R 上恒成立问题

例 4 (1)若不等式 $16kx^2+8kx+3>0$ 对一切实数 x 都成立,则实数 k 的取值范围为 (　　)

A. $\{k|0<k<3\}$　　B. $\{k|0\leqslant k\leqslant 3\}$

C. $\{k|0<k\leqslant 3\}$　　D. $\{k|0\leqslant k<3\}$

(2)(多选题)[2025·黑龙江绥化期末] 若对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $x^2-2mx+m\geqslant 0$,则 m 的值可以是 (　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

[听课笔记]

题型 2　在给定区间上的恒成立问题

例 5 (1)[2025·江苏南通质检] 若 $\forall x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$, $3x^2-\lambda x+1\geqslant 0$ 恒成立,则实数 λ 的最大值为 (　　)

A. $\frac{7}{2}$　　B. $2\sqrt{3}$

C. 4　　D. $\frac{13}{2}$

(2)(多选题)[2025·江西南昌联考] $\forall x\in(0,3]$，$x^2-ax+9\geqslant0$ 恒成立的一个充分条件是 ( )

A. $a\leqslant5$　B. $a\leqslant6$　C. $a\leqslant7$　D. $a\leqslant8$

[听课笔记]

题型 3　给定参数范围的恒成立问题

例 6　当$1\leqslant m\leqslant2$ 时，$mx^2-mx-1<0$ 恒成立，则实数 x 的取值范围是 ( )

A. $\frac{1-\sqrt2}{2}<x<\frac{1+\sqrt2}{2}$　B. $\frac{1-\sqrt3}{2}<x<\frac{1+\sqrt3}{2}$

C. $\frac{1-\sqrt5}{2}<x<\frac{1+\sqrt5}{2}$　D. $\frac{1-\sqrt7}{2}<x<\frac{1+\sqrt7}{2}$

[听课笔记]

◆◆ 总结反思

1. 一元二次不等式在 **R** 上恒成立的情况：

$ax^2+bx+c>0(a\neq0)$恒成立$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0,\\ \Delta<0.\end{cases}$

$ax^2+bx+c\leqslant0(a\neq0)$恒成立$\Leftrightarrow\begin{cases}a<0,\\ \Delta\leqslant0.\end{cases}$

2. (1)一元二次不等式在给定区间上的恒成立问题，其本质是将不等式恒成立转化为最大(小)值问题，即若 $f(x)$的图象连续不断，则 $f(x)\geqslant0(x\in[a,b])$恒成立等价于$f(x)_{\min}\geqslant0(x\in[a,b])$，$f(x)\leqslant0(x\in[a,b])$恒成立等价于$f(x)_{\max}\leqslant0(x\in[a,b])$.

(2)用分离参数法可避免分类讨论，直接求出参数的取值范围.

3. 对于给定参数范围的不等式恒成立问题，解法是主元变换，构造关于参数的新函数，根据新函数的图象和性质，即可列出满足条件的不等式组，从而得原不等式所对应的函数的自变量的取值范围.

【对点演练 3】 (1)已知关于 x 的不等式$(a-1)x^2-ax+a+1\geqslant0$ 的解集为 **R**，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(1,+\infty)$

B. $\left[\frac{2\sqrt3}{3},+\infty\right)$

C. $\left[-\frac{2\sqrt3}{3},\frac{2\sqrt3}{3}\right]$

D. $\left(-\infty,-\frac{2\sqrt3}{3}\right]\cup\left[\frac{2\sqrt3}{3},+\infty\right)$

(2)[2025·广东深圳期末] 若关于 x 的不等式 $x^2-ax+1<0$ 在$\left(\frac12,1\right]$上恒成立，则实数 a 的取值范围为________.

(3)[2025·福建龙岩期末] 已知二次函数 $f(x)=x^2-bx+c$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有$f(-2-x)=f(-2+x)$，且 $f(0)=6$.

①求 $f(x)$的解析式；

②若对任意 $m\in[-1,2]$，不等式 $mf(x)-6<0$ 恒成立，求 x 的取值范围.

[听课笔记]